Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 10
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 10.1 *3-dimensionaler Potenzialtopf* (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen eines strukturlosen Teilchens der Masse M im Potenzial

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r \equiv |\vec{x}| \le a, \\ \infty & \text{für} \quad r > a, \end{cases}$$

soweit dies analytisch möglich ist. Geben Sie einige der niedrigsten Energieniveaus zumindest numerisch an. Diskutieren Sie die Frage nach Entartung der Energieniveaus.

Hinweis: Der Ansatz $\psi(\vec{x}) = r^{-1/2}\chi(\kappa r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ führt mit einer geeigneten Konstanten κ auf eine Besselsche Differentialgleichung für die Funktion $\chi(\rho) = \chi(\kappa r)$,

$$\rho^2\chi'' + \rho\chi' + (\rho^2 - \mu^2)\chi = 0.$$

Für halbzahliges μ sind deren Lösungen $J_\mu(\rho)$ gegeben durch

$$J_{1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\rho, \qquad J_{-1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\rho, \qquad \frac{2\mu}{\rho}J_\mu(\rho) = J_{\mu-1}(\rho) + J_{\mu+1}(\rho).$$

Nehmen Sie zur (numerischen) Bestimmung der Nullstellen von J_μ ein Computer-Programm (z.B. `Mathematica`) zur Hilfe.

Aufgabe 10.2 *Spin-0-Teilchen im homogenen Magnetfeld* (2 Punkte)

Ein Spin-0-Teilchen mit der elektrischen Ladung q befinde sich in einem homogenen Magnetfeld, das in x_3-Richtung ausgerichtet ist, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B\vec{e}_3$.

a) Erzeugen Sie den Hamilton-Operator durch Anwendung der „minimalen Substitution“ $\hat{\vec{p}} \to \hat{\vec{\Pi}} = \hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{x}})$ auf den Hamilton-Operator des freien Teilchens und berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{\Pi}_k, \hat{x}_l]$.

b) Führen Sie das Eigenwertproblem des Hamilton-Operators auf eine Kombination aus freier Bewegung und harmonischem Oszillator zurück und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte die Form

$$E_{n,k_3} = \frac{(\hbar k_3)^2}{2m} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

haben, wobei $\hbar k_3$ der kontinuierliche Eigenwert von $\hat{p}_3$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3 *Elektron im Magnetfeld* (2 Punkte)

Man betrachte ein Elektron (Masse m, Ladung $-e$), dessen einziger Freiheitsgrad der Spin ist. Der Hamilton-Operator dieses Elektrons im Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$H = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\frac{e}{m}\,\vec{S} \cdot \vec{B}.$$

In der Basis der Eigenzustände $|\pm\rangle$ zu S_3 sind die Komponenten des Spinoperators $S_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$, gegeben durch die Pauli-Matrizen σ_k.

a) Berechnen Sie für ein homogenes, zeitlich konstantes Magnetfeld in x_3-Richtung die Zeitabhängigkeit des Zustands

$$|\psi(t)\rangle = \psi_+(t)|+\rangle + \psi_-(t)|-\rangle = \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}.$$

b) Das Elektron befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem normierten Eigenzustand $|\pm_1\rangle$ von S_1. Man berechne die entsprechenden Erwartungswerte von S_k zur Zeit t.