Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 9
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 9.1 *Erwartungswerte von Drehimpulskomponenten* (2 Punkte)

Betrachten Sie die Eigenzustände $|j, m\rangle$ von $\vec{J}^2$ und J_3 in der üblichen Notation, wobei $\vec{J}$ den Drehimpulsoperator bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle J_1\rangle$, $\langle J_2\rangle$, $\langle J_1^2\rangle$, $\langle J_2^2\rangle$ im Zustand $|j, m\rangle$.

b) Zeigen Sie, dass $|j, m\rangle$ Eigenvektor zu $J_\perp^2 \equiv J_1^2 + J_2^2$ ist und bestimmen Sie den Eigenwert.

Aufgabe 9.2 *Bahndrehimpuls für Teilchen im Zentralkraftfeld* (2 Punkte)

Ein strukturloses Teilchen der Masses M befinde sich in einem Zentralpotential $V(r)$, wobei $r = |\vec{x}|$.

a) Zeigen Sie, dass zwischen dem Hamilton-Operator $\hat{H}$ des Systems und dem Bahndrehimpuls $\vec{L} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$ folgende Kommutatorrelationen bestehen:

$$[\hat{H}, L_3] = 0, \qquad [\hat{H}, \vec{L}^2] = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\vec{p}}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{\hat{r}^2},$$

wobei $\hat{\vec{p}}$ den (kartesischen) Impulsoperator und

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\vec{x}}}{\hat{r}} \cdot \hat{\vec{p}} + \hat{\vec{p}} \cdot \frac{\hat{\vec{x}}}{\hat{r}}\right)$$

den Operator des Radialimpulses bezeichnen.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3 *Endliche Drehung für Spin-$\frac{1}{2}$-Zustände* (3 Punkte)

Der Operator

$$T(\vec{\theta}) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\vec{\theta}\cdot\vec{J}\right\}, \qquad \vec{\theta} = \theta\vec{n},$$

generiert endliche Drehungen mit dem Drehwinkel θ um die Achse $\vec{n}$ mit $\vec{n}^2 = 1$, wobei $\vec{J}$ den Drehimpulsoperator bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im Ruhesystem, d. h. für $\vec{J} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ ($\vec{\sigma}$ = Vektor aus Pauli-Matrizen σ_i, $i = 1, 2, 3$), gilt:

$$T(\vec{\theta}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathrm{i}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2$ und dann $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^k$ für $k \in \mathbb{N}$ unter Benutzung der Identität

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + \mathrm{i}\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

b) Eine *Euler-Drehung* wird durch den Operator

$$U(\alpha,\beta,\gamma) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha\sigma_3\right\}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\sigma_2\right\}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma\sigma_3\right\}$$

bewirkt. Berechnen Sie die 2×2-Matrix $U(\alpha,\beta,\gamma)$ unter Verwendung der expliziten Darstellung der Pauli-Matrizen aus der Vorlesung.

Ergebnis:

$$U(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix}.$$

c) Wie lautet der Zusammenhang zwischen (α,β,γ) und $(\theta,\vec{n})$?