Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 8
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 8.1 *Kohärente Zustände* (5 Punkte)

Jeder Eigenzustand $|\lambda\rangle$ des Vernichtungsoperators a, d. h. $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, eines eindimensionalen harmonischen Oszillators definiert einen kohärenten Zustand, wobei λ im Allgemeinen eine komplexe Zahl darstellt.

a) Beweisen Sie, dass

$$|\lambda\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$$

ein normierter kohärenter Zustand ist, wobei $|0\rangle$ den Grundzustand des harmonischen Oszillators bezeichnet.

b) Zeigen sie, dass $|\lambda\rangle$ minimale Orts-Impuls-Unschärfe besitzt.

c) Entwickeln Sie $|\lambda\rangle$ in Energieeigenzustände $|n\rangle$,

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle.$$

Welche Art von Wahrscheinlichkeitsverteilung ist $|f(n)|^2$?

d) Schätzen Sie für $|\lambda| \gg 1$ die Zahl $n_{\max}$ ab, für die $|f(n)|^2$ maximal wird, und vergleichen Sie $E_{n_{\max}}$ mit dem Energieerwartungswert E_λ im Zustand $|\lambda\rangle$.

Hinweis: Benutzen Sie die Stirling-Formel.

e) Zeigen Sie, dass man durch Anwendung des Translationsoperators

$$T(s) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}s\hat{p}}$$

auf den Grundzustand $|0\rangle$, wobei $T(s)$ eine Verschiebung um die Distanz $s \in \mathbb{R}$ bewirkt, einen kohärenten Zustand erhält. Was ist der zugehörige Eigenwert von a?

Hinweis: Benutzen Sie eine spezielle Form der BCH-Formel.

Aufgabe 8.2 *Potentialumeichung* (1 Punkt)

Ein strukturloses Teilchen der Masse m befinde sich im Potential $V(\hat{\vec{x}}, t)$, d. h. der Hamilton-Operator des Systems lautet $H = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}}, t)$. Wie ändert sich der Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0)$ des Systems, wenn man zum Potential $V(\hat{\vec{x}}, t)$ eine beliebige zeitabhängige reelle Funktion $f(t)$ addiert? Wie wirkt sich diese Potentialumeichung auf Observablen aus?

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 *Translationsoperator im Ortsraum* (1 Punkt)

Bestimmen Sie die Wirkung des Translationsoperators $T(\vec{a}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}$ auf eine beliebige (Einteilchen-)Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ im Ortsraum.

Hinweis: Verwenden Sie die Ortsdarstellung des Impulsoperators $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla}$.