Übungen zur Theoretischen Physik III (Quantenmechanik) — Blatt 7
Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS 2020

Aufgabe 7.1 NH_3-Schwingung (3 Punkte)

Das Ammoniakmolekül läßt sich idealisiert als ein quantenmechanisches System mit zwei Zuständen betrachten: Der Zustandsvektor $|1\rangle$ bzw. $|2\rangle$ beschreibe die Konfiguration, bei der sich das Stickstoffatom über bzw. unter der durch die drei Wasserstoffatome bestimmten Ebene befindet. Dann läßt sich der Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ und der Hamilton-Operator $\hat{H}$ bezüglich der orthonormierten Basis $|j\rangle$, $j = 1, 2$ darstellen als

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{2} c_j(t)|j\rangle \qquad \text{mit} \qquad c_j(t) = \langle j|\psi(t)\rangle,$$
$$\hat{H} = \sum_{i,j=1}^{2} H_{ij}|i\rangle\langle j| \qquad \text{mit} \qquad H_{ij} = \langle i|H|j\rangle.$$

Aus Symmetriegründen hat die Matrix (H_{ij}) folgende Form:

$$(H_{ij}) = \begin{pmatrix} E & A \\ A^* & E \end{pmatrix}, \qquad E \in \mathbb{R}, \qquad A \in \mathbb{C}.$$

a) Geben Sie die Energieeigenwerte E_i und die zugehörigen Energieeigenzustände $|E_i\rangle$ dieses Systems an. Wie lautet die unitäre Matrix B, die den Basiswechsel von $|j\rangle$ nach $|E_i\rangle$ beschreibt?

b) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$ sowohl in der $|E_i\rangle$- als auch in der $|j\rangle$-Basis.

c) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|1\rangle$. Bestimmen Sie den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t und die Wahrscheinlichkeit $P_{1j}(t)$ $(j = 1, 2)$, das System zur Zeit t im Zustand $|j\rangle$ zu finden.

Aufgabe 7.2 *Freies Teilchen im Heisenberg-Bild* (2 Punkte)

Betrachten Sie die kräftefreie Bewegung eines Teilchens der Masse m.

a) Lösen Sie jeweils die Bewegungsgleichung für den Ortsoperator $\hat{\vec{x}}_\mathrm{H}(t)$ und den Impulsoperator $\hat{\vec{p}}_\mathrm{H}(t)$ im Heisenberg-Bild.

b) Drücken Sie die Erwartungswerte der Orts- und Impulsoperatoren zum Zeitpunkt t durch ihre Anfangswerte zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und die Zeit t aus.

c) Berechnen Sie $[\hat{x}_{k\mathrm{H}}(t_1), \hat{x}_{l\mathrm{H}}(t_2)]$, $[\hat{x}_{k\mathrm{H}}(t_1), \hat{p}_{l\mathrm{H}}(t_2)]$, und $[\hat{p}_{k\mathrm{H}}(t_1), \hat{p}_{l\mathrm{H}}(t_2)]$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 *Fermi-Oszillator* (3 Punkte)

Betrachten Sie das quantenmechanische System eines sogenannten „Fermi-Oszillators“, dessen Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hbar\omega f^+ f^-$$

dem des gewöhnlichen harmonischen Oszillators sehr ähnlich sieht. Die Schiebeoperatoren f^- und $f^+ = (f^-)^\dagger$ erfüllen allerdings Antikommutator- an Stelle von Kommutatorrelationen:

$$\{f^\pm, f^\pm\} = 0, \qquad \{f^+, f^-\} = 1,$$

wobei $\{A, B\} \equiv AB + BA$ für Operatoren A, B.

a) Sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$ mit Eigenwert E_n. Zeigen Sie, dass $E_n \geq 0$ und $\hat{H} f^- |n\rangle = (\hbar\omega - E_n) f^- |n\rangle = 0$. Welche Möglichkeiten gibt es letztere Gleichung zu erfüllen? Zeigen Sie, dass ein Grundzustand $|0\rangle$ mit $E_0 = 0$ und $f^-|0\rangle = 0$ existiert.

b) Konstruieren Sie ausgehend vom normierten Grundzustand $|0\rangle$, der als nicht-entartet angenommen wird, alle angeregten orthonormierten Energie-Eigenzustände $|n\rangle$. Wieviele gibt es? Berechnen Sie die zugehörigen Energie-Eigenwerte E_n (> 0).

c) Das Modell wird nun auf $F > 1$ derartige Oszillatoren verallgemeinert, d. h.

$$\hat{H} = \hbar\omega \sum_{k=1}^{F} f_k^+ f_k^-, \qquad \{f_k^\pm, f_l^\pm\} = 0, \qquad \{f_k^+, f_l^-\} = \delta_{kl}, \qquad f_k^+ = (f_k^-)^\dagger.$$

Der Grundzustand $|0, \ldots, 0\rangle$ wird durch $f_k^-|0, \ldots, 0\rangle = 0$ für alle $k = 1, \ldots, F$ charakterisiert und alle weiteren Zustände durch

$$|n_1, \ldots, n_F\rangle \propto (f_1^+)^{n_1} \cdots (f_F^+)^{n_F} |0, \ldots, 0\rangle$$

generiert. Ermitteln Sie alle orthonormierten Zustände $|n_1, \ldots, n_F\rangle$ und die zugehörigen Energie-Eigenwerte $E_{n_1,\ldots,n_F}$. In welcher Beziehung stehen Zustände wie $f_2^+ f_1^+ |0, \ldots, 0\rangle$, in denen die Reihenfolge der f_k^+-Operatoren nicht in k aufsteigend geordnet ist, zu den $|n_1, \ldots, n_F\rangle$?