Aufgabe 10.1 *3-dimensionaler Potentialtopf* (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen eines strukturlosen Teilchens der Masse M im Potential

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r \equiv |\mathbf{x}| \leq a, \\ \infty & \text{für} \quad r > a, \end{cases}$$

soweit dies analytisch möglich ist. Verwenden Sie dabei die Bedingung, dass die Wellenfunktion beschränkt sein soll. Geben Sie einige der niedrigsten Energieniveaus zumindest numerisch an. Diskutieren Sie die Frage nach Entartung der Energieniveaus.

Hinweis: Der Ansatz $\psi(\mathbf{x}) = r^{-1/2}\chi(\kappa r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ führt mit einer geeigneten Konstanten κ auf eine Bessel'sche Differentialgleichung für die Funktion $\chi(\rho) = \chi(\kappa r)$:

$$\rho^2 \chi'' + \rho \chi' + (\rho^2 - \mu^2)\chi = 0.$$

Für halbzahliges μ sind deren Lösungen $J_{\pm\mu}(\rho)$ gegeben durch

$$J_{1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\rho, \qquad J_{-1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\rho, \qquad \frac{2\mu}{\rho} J_\mu(\rho) = J_{\mu-1}(\rho) + J_{\mu+1}(\rho),$$

d.h. insbesondere $J_\mu(\rho) \underset{\rho\to 0}{\widetilde{\quad}} \text{konst.} \cdot \rho^\mu$.

Aufgabe 10.2 *Spin-0-Teilchen im homogenen Magnetfeld* (2 Punkte)

Ein Spin-0-Teilchen mit der elektrischen Ladung q und Masse m befinde sich in einem homogenen Magnetfeld, das in x_3-Richtung ausgerichtet ist ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\mathbf{e_3}$).

a) Erzeugen Sie den Hamilton-Operator durch Anwendung der „minimalen Substitution“ $\hat{\mathbf{p}} \;\to\; \hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})$ auf den Hamilton-Operator des freien Teilchens und berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{\Pi}_k, \hat{x}_l]$.

b) Führen Sie das Eigenwertproblem des Hamilton-Operators auf eine Kombination aus freier Bewegung und harmonischem Oszillator zurück und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte die Form haben:

$$E_{k,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n \in \mathbf{N}_0,$$

wobei $\hbar k$ der kontinuierliche Eigenwert von $\hat{p}_3$ ist.

Bitte wenden !

Aufgabe 10.3 *Endliche Drehung für Spin-$\frac{1}{2}$-Zustände* (3 Punkte)

Der Operator

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}\right\}, \qquad \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} = \theta\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{J} = \theta\sum_{k=1}^{3} n_k J_k,$$

generiert endliche Drehungen mit dem Drehwinkel θ um die Achse $\mathbf{n}$ mit $\mathbf{n}^2 = 1$, wobei $\mathbf{J}$ den Drehimpulsoperator bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, d.h. $\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\sigma}$ = Pauli-Matrizen), gilt:

$$U_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\theta}) = \cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{i}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\frac{\theta}{2}.$$

(Hinweis: Berechne zunächst $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^k,\ k\in\mathbf{N}$.)

b) Eine *Euler-Drehung* wird beschrieben durch

$$U_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha\sigma_3\right\}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\beta\sigma_2\right\}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma\sigma_3\right\}.$$

Berechnen Sie die 2×2-Matrix $U_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma)$. Ergebnis:

$$U_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -\sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \\ \sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & \cos\frac{\beta}{2}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix}.$$

c) Wie lautet der Zusammenhang zwischen (α,β,γ) und $(\theta,\mathbf{n})$?