Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 12

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

Aufgabe 12.1 $(2 \to 2)$-*Teilchen-Kinematik und Mandelstam-Variablen* (1,5 Punkte)

Man betrachte die Streureaktion $A(p_1) + B(p_2) \to C(p_3) + D(p_4)$ mit den Viererimpulsen p_i und $p_i^2 = m_i^2 c^2$, wobei m_i die Teilchenmassen sind. Die Mandelstam-Variablen s, t, u sind definiert durch $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$.

a) Zeigen Sie, dass $s + t + u = \sum\limits_{i=1}^{4} m_i^2 c^2$.

b) Im Massenmittelpunktsystem Σ sind die Impulse gegeben durch

$$p_{1,2}^\mu = (E_{1,2}/c, 0, 0, \pm q), \quad p_{3,4}^\mu = (E_{3,4}/c, \pm k\cos\phi\sin\theta, \pm k\sin\phi\sin\theta, \pm k\cos\theta).$$

Berechnen Sie s, t, u in Σ. Welche Bedeutung hat die Variable s? Drücken Sie t und u durch s, die Winkel θ, ϕ und die Massen m_i aus.

Hinweis: Sie können auf Ergebnisse aus Aufgabe 11.3 zurückgreifen.

c) Betrachten Sie den Spezialfall $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = m_4 = m$ im Ruhesystem Σ' von Teilchen B (z. B. Compton-Streuung am ruhenden Elektron). Leiten Sie die Beziehung zwischen E_3' und θ_3' (Winkel zwischen $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_3$) für gegebene Energie E_1' her, indem Sie s, t, u in Σ' berechnen und a) verwenden.

Aufgabe 12.2 *Felder eines stromdurchflossenen Drahtes* (1,5 Punkt)

Auf der x^3-Achse liege ein dünner Metalldraht (Widerstand = 0, Außenraum = Vakuum), in dem in x^3-Richtung ein stationärer Strom der Stärke I fließt. Die Leitungselektronen fließen dabei in $-x^3$-Richtung mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = -v\boldsymbol{e}_3$ im Ruhesystem Σ der Metallionen, die die negative Ladungsdichte der Elektronen (im makroskopischen Mittel) genau neutralisieren.

a) Berechnen Sie die elektrischen und magnetischen Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ in Σ.

b) Welche Felder $\boldsymbol{E}'$ und $\boldsymbol{B}'$ ergeben sich im Ruhesystem Σ' der Elektronen und von welchen Quellen werden diese erzeugt?

c) Parallel zum Draht (nun „a“ genannt) sei nun ein weiterer Draht „b“ gespannt, der einen Strom derselben Stärke und Richtung führt. Auf diesen zweiten Draht wirkt somit die Kraftdichte $\boldsymbol{f} = \rho_\mathrm{b}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}_\mathrm{b} \times \boldsymbol{B}$, wobei ρ_b und $\boldsymbol{j}_\mathrm{b}$ Ladungsdichte und Stromdichte von Draht „b“ sind. Überprüfen Sie, dass $\boldsymbol{f}$ die raumartigen Komponenten eines kontravarianten Vierervektors (mit $f^0 = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}/c$) darstellen, indem Sie $\boldsymbol{f}$ in Σ und Σ' berechnen.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3 *Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes* (2 Punkte)

Der relativistische Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes im Vakuum, das durch den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ beschrieben wird, ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + F^{\mu\rho} F_{\rho}{}^{\nu} \right).$$

a) Berechnen Sie die Komponenten von $T^{\mu\nu}$ und identifizieren Sie deren physikalische Bedeutung.

b) Zeigen Sie unter Benutzung der Maxwell-Gleichungen (kovariante Form), dass $\partial_\mu T^{\mu\nu} = j_\rho F^{\rho\nu}$ und identifizieren Sie darin Erhaltungssätze.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die homogene Maxwell-Gleichung $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ in der Form $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$ geschrieben werden kann.