Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 2

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

Aufgabe 2.1 *Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten* (1,5 Punkte)

Es lässt sich zeigen, dass der Laplace-Operator in krummlinigen Orthogonalkoordinaten (q_1, q_2, q_3) durch

$$\Delta F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \tag{1}$$

gegeben ist. Wie in Aufgabe 1.3 treten hier die Koeffizienten $h_i = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \right|$ auf.

a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten folgende Form hat:

$$\Delta F(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten folgende Form hat:

$$\Delta F(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \tag{3}$$

c) Bonusaufgabe: (1 Sonderpunkt)
Zeigen Sie (1), indem Sie die Green'sche Formel für folgendes Integral ausnutzen:

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, f \Delta F = - \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot (\boldsymbol{\nabla} F) + \text{Oberflächenterme}. \tag{4}$$

Die Funktion $f(\boldsymbol{x})$ sei so gewählt, dass sie und ihre Ableitungen auf dem Rand des Integrationsvolumens $A(V)$ verschwindet; ansonsten ist $f(\boldsymbol{x})$ beliebig. Gehen Sie dann rechts auf die neuen Koordinaten über und integrieren Sie anschließend partiell. Aus dem Ergebnis lässt sich dann ΔF gewinnen durch den Übergang $f(\boldsymbol{x}) \to \delta(\boldsymbol{x})$.

Aufgabe 2.2 *Rotationssymmetrische Ladungsverteilung* (1,5 Punkte)

Betrachten Sie eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung, d.h. eine Ladungsdichte $\rho(r)$, die nur von $r = |\boldsymbol{x}|$ abhängt.

a) Zeigen Sie, dass sich das Potential in folgender Form schreiben lässt:

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^\infty \mathrm{d}r'\, r' (|r + r'| - |r - r'|)\, \rho(r') \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_0^r \mathrm{d}r'\, r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty \mathrm{d}r'\, r' \rho(r') \right].\end{aligned} \tag{5}$$

b) Betrachten Sie nun eine rotationssymmetrische Ladungsverteilung mit einem Loch, d.h. mit $\rho(r) = 0$ für $r < r_0$. Welche Form hat das Potential im Inneren des Loches?

c) Wie sieht das Potential außerhalb einer Ladungsverteilung aus, die für $r > r_0$ verschwindet?

Aufgabe 2.3 *Ladungsverteilung im Wasserstoffatom* (2,5 Punkte)

Die Ladungsdichte des Wasserstoffatoms im Grundzustand ist die Summe der Kernladungsdichte ρ_p und der folgenden Ladungsdichte ρ_e der Atomhülle:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \rho_p(\boldsymbol{x}) + \rho_e(\boldsymbol{x}), \quad \rho_p(\boldsymbol{x}) = e\delta(\boldsymbol{x}), \quad \rho_e(\boldsymbol{x}) = Ae^{-2r/a_0}. \tag{6}$$

Hier ist $r = |\boldsymbol{x}|$ und der Bohr'sche Radius ist durch $a_0 = 5.3 \times 10^{-11}$ m gegeben.

a) Bestimmen Sie die Konstante A so, dass das Atom elektrisch neutral ist, d.h. $\int \mathrm{d}^3x\, \rho(\boldsymbol{x}) = 0$, wobei das Integral über den gesamten Raum ausgeführt wird.

b) Berechnen Sie das durch die Ladungsverteilung ρ erzeugte Potential $\Phi(\boldsymbol{x})$ mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 2.2a).

Hinweis zur Kontrolle: Das Ergebnis ist

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}e^{-2r/a_0}\left(1 + \frac{r}{a_0}\right). \tag{7}$$

c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ aus dem Potential.

d) Geben Sie für Φ und $\boldsymbol{E}$ jeweils die Grenzfälle $r \gg a_0$ und $r \ll a_0$ an.

e) Berechnen Sie die elektrostatische Wechselwirkungsenergie W_{ep}, die als Differenz der elektrostatischen Gesamtenergie W und den „Selbstenergien“ W_i $(i = p, e)$ von Kern und Atomhülle definiert ist:

$$W_{ep} = W - W_p - W_e, \tag{8}$$

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \rho(x)\Phi(x), \quad W_i = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \rho_i(x)\Phi_i(x). \tag{9}$$

Φ_i ist jeweils das durch die Ladungsdichte ρ_i erzeugte Potential.

f) Zusatzfrage: (0,5 Sonderpunkte)
In der Quantenmechanik ergibt sich die Gesamtenergie des Grundzustands als $E_1 = -e^2/(8\pi\varepsilon_0 a_0)$. Ist das Ergebnis von e) im Einklang mit der Aussage des Virialsatzes der klassischen Mechanik?