Übungen zur Speziellen Relativitätstheorie **SS 2014**

Aufgabe 11 *Lie Gruppen und Algebren* (2 Punkte)

Für die Elemente einer Lie Gruppe muss die Konsistenzbedingung

$$g(\omega_i)g(\omega_j) = \exp\left(-\mathrm{i}\omega_i^a T^a\right)\exp\left(-\mathrm{i}\omega_j^b T^b\right) = \exp\left(-\mathrm{i}f^a(\omega_i,\omega_j)T^a\right). \tag{1}$$

gelten, wobei die Taylor-Entwicklung der Funktion f von der Form

$$f^a(\omega_i,\omega_j) = \omega_i^a + \omega_j^a + f^{abc}\omega_i^b\omega_j^c + \dots .$$

ist. Zeigen Sie, dass die Generatoren T^a die Lie Algebra

$$[T^a, T^b] = \mathrm{i}f^{abc}T^c$$

erfüllen müssen.
Hinweis: Eine Möglichkeit dies zu sehen, ist durch Entwicklung von (1) bis zur zweiten Ordnung in den ω_i.

Aufgabe 12 *Generatoren der Galilei Gruppe* (3 Punkte)

Betrachten Sie eine Funktion $f(t,\vec{x})$, die sich folgendermaßen unter Galilei-Transformationen transformiert:

$$f'(t,\vec{x}) = f(t + a^0, R^{-1}(\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a})) \equiv e^{-\mathrm{i}\left(\vec{\phi}\cdot\vec{J}+\vec{a}\cdot\vec{P}+\vec{v}\cdot\vec{K}+a^0H\right)}f(t,\vec{x}) \tag{2}$$

mit der Rotationsmatrix $R = R(\vec{\phi})$. Der Generator der Drehungen ist durch den Operator $J^i = -\mathrm{i}\epsilon^{ijk}x^j\nabla^k$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch Entwickeln von (2) bis zur ersten Ordnung in den Parametern a^0, a^i, v^i (für $\vec{\phi} = 0$), dass die übrigen Generatoren der Galilei Gruppe durch folgende Operatoren dargestellt werden:

$$H = \mathrm{i}\partial_t\,, \qquad P_i = \mathrm{i}\partial_i \qquad K_i = \mathrm{i}t\partial_i$$

b) Berechnen Sie die Kommutatorrelationen

$$[H, K_i], \qquad [J_i, K_j], \qquad [J_i, P_j]$$

Aufgabe 13 *Generatoren der Poincaré Gruppe* (4 Punkte)

Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$ (mit $x = (ct, \vec{x})$), die sich folgendermaßen unter Poincaré-Transformationen transformiert:

$$f'(x) = f(\Lambda^{-1}(x+a)) \equiv e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta} - \mathrm{i}a_\alpha P^\alpha} f(x).$$

mit den infinitesimalen Lorentztransformationen

$$\Lambda^{-1}(\delta\omega) = \mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} + \ldots, \qquad (M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \mathrm{i}(g^{\alpha\mu}\delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu}\delta^\alpha_\nu)$$

a) Zeigen Sie, dass die Generatoren durch die Operatoren

$$L^{\alpha\beta} = \mathrm{i}\left(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha\right), \qquad P^\alpha = \mathrm{i}\partial^\alpha$$

dargestellt werden

b) Berechnen Sie die Kommutatorrelationen

$$[L^{\alpha\beta}, L^{\gamma\delta}], \qquad [L^{\alpha\beta}, P^\gamma]$$

Hinweis: $\partial^\alpha x^\beta = g^{\alpha\beta}$.

Aufgabe 14 *Spinor-Darstellungen der Lorentzgruppe* (3 Punkte)

Einem Vierervektor x^μ lassen sich die Matrizen

$$X = x_\mu\sigma^\mu, \qquad \bar{X} = x_\mu\bar{\sigma}^\mu$$

zuordnen, wobei

$$\sigma^\mu = (\mathbb{I}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \qquad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$$

mit den Pauli-Matrizen σ^i.

a) Welche Bedeutung haben $\det(X)$ und $\det(\bar{X})$?

b) Gegeben seien komplexe 2×2 Matrizen A und B mit $\det A = \det B = 1$, die sonst beliebig sind. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $X \to X' = AXA^\dagger$ und $\bar{X} \to \bar{X}' = B\bar{X}B^\dagger$ Lorentz-Transformationen $x \to x' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ definieren.

Es gibt also Abbildungen, die Lorentz-Transformationen auf komplexe 2×2 Matrizen mit Determinante eins abbilden (diese Matrizen bilden die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$). Diese definieren also Darstellungen der Lorentzgruppe, die sogenannten Spinor-Darstellungen, die für die relativistische Beschreibung von Teilchen mit Spin ein-halb relevant sind.